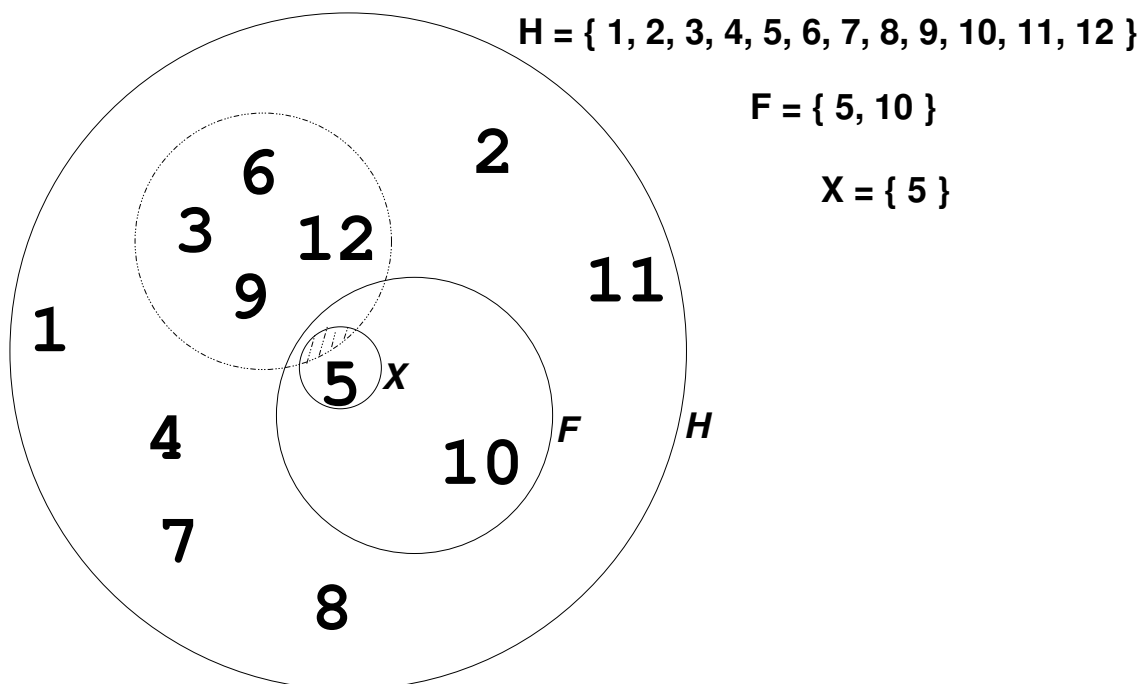


Musterlösung Übung 3

Mathematische Grundlagen, Bool'sche Logik

1. Geben Sie die Stunden auf einem Uhrenzifferblatt in Form einer Mengendarstellung an. (Menge H) (Siehe Skizze)
2. Skizzieren Sie (graphisch) die Menge H , und markieren Sie die Teilmenge der ganzzahlig durch 5 teilbaren Zahlen (Menge F) in der Menge H als $F \subset H$. (Siehe Skizze)
3. Bilden Sie einen Durchschnitt der Teilmenge F und mit der Menge H , in dem nur ungerade Zahlen enthalten sind. Wieviele Elemente hat die so entstandene Teilmenge X ? (Siehe Skizze), 1 Element.
4. Bilden Sie eine Teilmenge von X mit Elementen, die ganzzahlig durch 3 teilbar sind. Das Ergebnis ist, wie auch aus der Skizze hervorgeht, eine leere Menge, da das einzige Element von X nicht durch drei teilbar ist.



5. Zeigen Sie anhand der Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ und $C = \{2, 4, 6, 8\}$ die mengentheoretischen Assoziativ- und Distributivgesetze.

Assoziativgesetze:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cap C) &\stackrel{!}{=} (A \cap B) \cap C \\ \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap (\{2, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\}) &\stackrel{!}{=} (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{2, 3, 5, 7\}) \cap \{2, 4, 6, 8\} \\ \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{2\} &\stackrel{!}{=} \{2, 3, 5, 7\} \cap \{2, 4, 6, 8\} \\ \{2\} &\equiv \{2\} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &\stackrel{!}{=} (A \cup B) \cup C \\ \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup (\{2, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6, 8\}) &\stackrel{!}{=} (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{2, 3, 5, 7\}) \cup \{2, 4, 6, 8\} \\ \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} &\stackrel{!}{=} \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cup \{2, 4, 6, 8\} \\ \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} &\equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Distributivgesetz:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &\stackrel{!}{=} (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap (\{2, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6, 8\}) &\stackrel{!}{=} \\ (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{2, 3, 5, 7\}) \cup (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{2, 4, 6, 8\}) & \\ \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} &\stackrel{!}{=} \{2, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6, 8\} \\ \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} &\equiv \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

6. Stellen Sie die *Signatur* der Quadratfunktion in einer geeigneten Form dar.

$$f(x) = x \cdot x \quad (1)$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}\} \quad (2)$$

$$W(f) = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\} \quad (3)$$

7. Ist die Sinusfunktion $f(x) = \sin(x)$ im Definitionsbereich $0 \dots \pi$ und im Wertebereich $0 \dots 1$ injektiv, surjektiv, bijektiv (Skizze, ohne Beweis)?

Die Sinusfunktion ist im angegebenen Bereich surjektiv (es gibt für jeden Ausgabewert im Wertebereich auch mindestens einen Eingabewert), nicht injektiv (es gibt für einige im erlaubten Wertebereich liegende Funktionswerte mehr als einen möglichen Eingabewert, z.B. $x_1 = 0$ und $x_2 = \pi \Rightarrow f(x_1) = 0 = f(x_2)$), und folglich auch nicht bijektiv.

8. Ist die Parabelfunktion $f(x) = x^2$ im Definitionsbereich $-2 \leq x \leq +2$ und im Wertebereich $-4 \leq f(x) \leq +4$ injektiv, surjektiv, bijektiv (Skizze, ohne Beweis)?

Die Parabelfunktion ist im angegebenen Bereich nicht surjektiv, denn ein (im angegebenen Wertebereich durchaus vorhandener) Funktionswert -4 lässt sich mit keinem Eingabewert aus der Definitionsmenge erzeugen (es sei denn, wie nehmen imaginäre Zahlen hinzu), und auch nicht injektiv (z.B. gibt es zwei verschiedene Eingabewerte, die als Funktionswert 2 erzeugen), und ist folglich auch nicht bijektiv.

9. In welchem Definitions- und Wertebereich ist die lineare Funktion $f(x) = 4 \cdot x$ injektiv, surjektiv, bijektiv (Skizze, ohne Beweis)?

Die lineare Funktion deckt sämtliche Ein- und Ausgabewerte innerhalb der reellen Zahlen ab, und kann folglich im Bereich $x, y \in \mathbb{R}$ als bijektiv angenommen werden.

10. Stellen Sie eine Wertetabelle auf für die Bool'sche Verknüpfung $(a \vee b \vee c) \wedge (c \vee b \vee a) \wedge a$. Wie kann man diese Formel vereinfachen?

a	b	c	$(a \vee b \vee c) \wedge (c \vee b \vee a) \wedge a$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Selbst wenn man es nicht gleich an der Formel sieht, ein Vergleich der ersten Spalte (a) mit der letzten Spalte (Formel) in der Tabelle zeigt, dass die Formel für beliebige Eingabewerte immer den Wert von a annimmt. Daher lässt sich die Formel zu a vereinfachen.

11. Wenn Sie nur die Zahlenwerte „0“ (=falsch) und „nicht 0“ (=wahr) betrachten, welche mathematische Grundrechenart ist der Konjunktion, und welche der Disjunktion äquivalent?

Der Konjunktion (UND-Verknüpfung) entspricht die MULTIPLIKATION, der Disjunktion (ODER-Verknüpfung) entspricht die ADDITION. (Beispiele...)