

Musterlösung Übung 4

Zahlendarstellungen, Grammatiken

1. Wie viele unterschiedliche Werte kann eine 16-stellige, binäre Ganzzahl annehmen?

$$2^{16} = 65536$$

2. Welcher Zahl im Dezimalsystem entspricht die Binärzahl 11001100_2 ?

$$\begin{array}{rcccccccl} 2^7 & + & 2^6 & + & 2^3 & + & 2^2 & = & \\ 128 & + & 64 & + & 8 & + & 4 & = & 204_{10} \end{array}$$

3. Wandeln Sie die Zahl 65_{10} in eine Binärzahl um.

$$65 = 64 + 1 = 2^6 + 2^0 = 1000001_2$$

4. Stellen Sie die Dezimalzahl 511 in der hexadezimalen Darstellung dar.

$$\begin{array}{rcll} 511 & = & 256 & + & 240 & + & 15 \\ & = & 1 \cdot 16^2 & + & 15 \cdot 16^1 & + & 15 \cdot 16^0 \\ & = & 1FF_{16} \end{array}$$

5. Berechnen Sie binär: $1111_2 + 1111_2$

$$\begin{array}{rcccc} \text{Zahl 1:} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \text{Zahl 2:} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \text{Übertrag:} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \text{Ergebnis:} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Das Ergebnis kann in diesem Beispiel auch direkt ohne Rechnung abgelesen werden, da eine Multiplikation einer Binärzahl mit 2 (= Addition der Zahl mit sich selbst) einer Verschiebung nach links (um eine 2-er Stelle nach oben) entspricht.

6. Welche Minimal- und Maximalwerte kann eine einfachgenaue Fließkommazahl nach dem IEEE 754 Standard annehmen? Ist die Zahl $\frac{1}{5}$ nach diesem Standard präzise darstellbar?

$$\begin{array}{ll} \text{Minimalwert (dezimal):} & -3,40 \cdot 10^{38} \\ \text{Maximalwert (dezimal):} & +3,40 \cdot 10^{38} \\ \text{[Minimal von 0 unterschiedliche Zahl:} & \pm 1,18 \cdot 10^{-38}] \end{array}$$

Der Wert $\frac{1}{5} = 0,2$ ist, was bei so einer „übersichtlichen“ Dezimalzahl verblüffen mag, schon nicht mehr exakt darstellbar, da die Nachkommastellen durch eine bitweise Verschiebung von Zahlen der Form $\frac{1}{2^n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ im Dualsystem angenähert werden. Dass hinter dem Komma vermeintlich eine ganzzahlige Zahl aus dem Binärsystem steht (2^1), täuscht, da es in Wirklichkeit eine um 10^{-1} verschobene Zahl im Dezimalsystem ist.

Mit dem IEEE 754-Rechner-Applet unter

<http://www.h-schmidt.net/FloatApplet/IEEE754de.html>

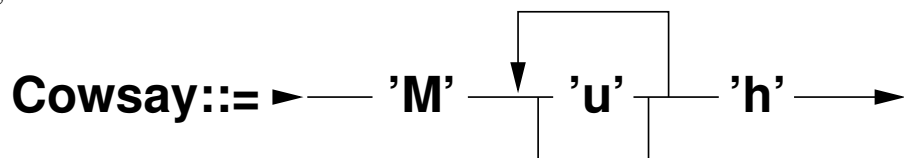
können Sie sich Rechenfehler anschaulich darstellen lassen, die durch Rundungen von Zahlen entstehen, die im Dezimalsystem „einfach“, jedoch im Binärsystem durchaus „kompliziert“ aussehen. Eine Zahl wie $0,125 = 2^{-3}$ ist hingegen absolut präzise nach IEEE 754 darstellbar.

Alternativ kann man versuchen, mit der Rechenvorschrift für Zahlen nach IEEE 754 die Mantisse und den Exponenten von Hand zu berechnen, was aber aufwändiger ist, als diese Aufgabe gedacht war.

7. Entwerfen Sie eine Grammatik (Chomsky Typ 2) für die „Kuh-Sprache“, welche Worte erzeugen soll, welche am Anfang aus einem $\boxed{M}$, am Ende aus einem $\boxed{h}$, und beliebig vielen $\boxed{u}$ dazwischen bestehen. Zeichnen Sie ein entsprechendes Syntaxdiagramm.

$$\begin{aligned} G &= (N, T, P, S) \\ N &= \{A, B\} \\ T &= \{M, u, h\} \\ P &= \{A \rightarrow MBh, B \rightarrow uB | \epsilon\} \\ S &= \{A\} \end{aligned}$$

Anmerkungen: In diesem Beispiel sind die Ausgaben 'M', 'u', 'h' nicht mit Anführungszeichen gekennzeichnet. Man erkennt aber anhand der überschaubaren Elemente der Nichtterminale und Terminale, ob es sich bei einem Element um eine Variable, oder eine Ausgabe handelt.



Anmerkungen: In diesem Diagramm wäre, wegen des zu 'u' parallelen Zweiges ohne Element, auch das Wort „Mh“ syntaktisch korrekt. „Beliebig viele $\boxed{u}$ “ kann tatsächlich auch so ausgelegt werden, dass auch kein „u“ vorkommen kann. Gleiches gilt auch für das Beispiel in der mathematischen Gleichungs-Darstellung. Semantisch spielt die Existenz eines solchen zusätzlichen Wortes bei Kühen vermutlich eher eine untergeordnete Rolle.

8. Entwerfen Sie eine Grammatik, die „einfache“ Fließkommazahlen ohne Exponent erzeugt.

$$\begin{aligned} G &= (N, T, P, S) \\ N &= \{\text{Fließkommazahl}, \text{Zahl}, \text{Ziffer}\} \\ T &= \{ '0', '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', ', ' \} \\ P &= \{ \text{Fließkommazahl} \rightarrow \text{Ziffer Zahl} ', ' \text{Ziffer Zahl}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Zahl} &\rightarrow \text{Ziffer Zahl} | \epsilon, \\
\text{Ziffer} &\rightarrow '0'|'1'|'2'|'3'|'4'|'5'|'6'|'7'|'8'|'9'\} \\
S &= \{\text{Fließkommazahl}\}
\end{aligned}$$

Hinweis: Mit dieser Grammatik muss jede syntaktisch korrekte Fließkommazahl mindestens eine Ziffer vor und nach dem Komma, und genau ein Komma besitzen. Je nach Aufwand (Nichtterminale, Produktionsregeln) lassen sich auch weitere Darstellungen realisieren; um der Aufgabenstellung zu genügen, reicht jedoch die gezeigte Version völlig aus.