Einführung in die Informatik

Klaus Knopper

19.10.2004

Mathematische Grundlagen

- Mengen
- Relationen, Funktionen, Abbildungen
- Äquivalenzrelationen
- Ordnungsrelationen

Mengen

- Beschreibung von Mengen
- Teilmengen
- Die leere Menge
- Durchschnitt und Vereinigung
- Differenz von Mengen
- Die Potenzmenge

Beschreibung von Mengen (1)

Unter einer **Menge** verstehen wir die Zusammenfassung gewisser Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens.

- Zwei Mengen sind gleich ($N = M$), wenn sie aus genau denselben Elementen bestehen.
- Es dürfen nur solche Mengen gebaut werden, bei denen entscheidbar ist, ob ein gewisses Objekt Element dieser Menge ist.

Beispiel 1: Die Menge aller natürlichen Zahlen von 3 bis einschließlich 9

Beispiel 2: Die Menge aller Studentinnen und Studenten in dieser Vorlesung.

Warum ist die „Menge aller sehr großen natürlichen Zahlen“ keine Menge?

Beschreibung von Mengen (2)

- Besteht eine Menge aus endlich vielen Elementen, so kann die Menge durch explizite Angabe der Elemente eindeutig beschrieben werden: $N = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- Bei Mengen ist die Reihenfolge ohne Bedeutung: $N = \{9, 3, 8, 5, 7, 6, 4\}$
- Man kann Elemente einer Menge x-mal aufschreiben, ohne dass sich die Menge ändert.
- (unendliche) Mengen können durch Eigenschaften beschrieben werden $M = \{x \mid x$ ist eine gerade Zahl$\}$

Teilmengen

Seien M und N Mengen, so gelten folgende Definitionen:

1. $x \in M$ bedeutet x ist Element von M
2. $x \notin M$ bedeutet x ist nicht Element von M
3. Wenn für alle $x \in N$ gilt $x \in M$, dann ist N eine **Teilmenge** von M. Oder kurz $N \subset M$.
4. $M = N$, so gilt $M \subset N$ und $N \subset M$.

Die leere Menge

Es hat sich als nützlich erwiesen, die Existenz einer Menge vorauszusetzen, die kein Element besitzt. Diese Menge bezeichnen wir als **leere Menge** $\emptyset$.

- Für jede Menge M gilt: $\emptyset \subset M$
- Sei M eine Menge, dann gilt: M ist nichtleer gdw.[a] (mindestens) ein $x \in M$ existiert.

[a] **g**enau **d**ann, **w**enn

Durchschnitt und Vereinigung

Durchschnitt und Vereinigung sind Operationen auf Mengen. Sie erzeugen aus zwei Mengen (M, N) eine neue Menge.

- Durchschnitt:[a] $M \cap N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\}$
- Vereinigung:[b] $M \cup N := \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\}$

Übung: Skizzieren Sie den Durchschnitt und die Vereinigung von Mengen in der bekannten Form.

---

[a] Wir werden später sehen, dass dies der logischen „und"-Verknüpfung, bzw. der Multiplikation entspricht.

[b] Wir werden später sehen, dass dies der logischen „oder"-Verknüpfung, bzw. der Addition entspricht.

Definitionen

L, M und N seien Mengen. Dann gilt:

(1)	$M \cap N \subset M$, $M \subset M \cup N$	(offensichtlich)
(2)	$M \cap N = N \cap M$, $M \cup N = N \cup M$	(Kommutativgesetze)
(3)	$M \cap (N \cap L) = (M \cap N) \cap L$, $M \cup (N \cup L) = (M \cup N) \cup L$	(Assoziativgesetze)
(4)	$M \cap (N \cup L) = (M \cap N) \cup (M \cap L)$	(Distributivgesetz)

Übung: Lesen dieser formale Beschreibung in „natürlicher Sprache“ zum besseren Verständnis + Aufzeichnen.

Differenz von Mengen

Die Differenzbildung ist eine weitere Möglichkeit, um aus zwei Mengen eine „neue“ zu bilden.
M und N seien Mengen. Dann heißt

$$M \setminus N := \{x \mid x \in M \text{ und } x \notin N\}$$

Differenz von M und N.

Die Potenzmenge

Hat man die Menge M, so kann man alle Teilmengen von M zu einer neuen Menge, der sogenannten Potenzmenge (2^M oder $\mathcal{P}(M)$), zusammenfassen.
M sei eine Menge. Dann heißt

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subset M\}$$

Potenzmenge von M.
Beispiel: Für $M = \{1,\, 2,\, 3\}$ ist

$$\mathcal{P}(M) := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Kann es leere Potenzmengen geben?

Relationen, Funktionen, Abbildungen

- Paarbildung und Kreuzprodukt
- Relationen
- Funktionen
- Abbildungen

Paarbildung

Normalerweise beschreibt man einen Punkt in der Ebene durch zwei Zahlen. Man führt ein Koordinatensystem ein, das aus zwei senkrecht zueinander stehenden Achsen (x_0, x_1) besteht. Den Schnittpunkt der Achsen bezeichen wir als Bezugspunkt. Die Position eines Punktes in diesem Koordinatensystem lässt sich nun als Abstand zum Bezugspunkt ausdrücken.

$$P = (p_1, p_2)$$

p_1 ist dabei der senkrechte Abstand zum Bezugspunkt auf der x_0-Achse. p_0 ist dabei der senkrechte Abstand zum Bezugspunkt auf der x_1-Achse.
Die Reihenfolge der Komponenten x_0 und x_1 ist zu beachten. Der Punkt $(1, 2)$ ist verschieden zum Punkt $(2, 1)$. (p_1, p_2) heißt **geordnetes Paar**

Kreuzprodukt

Sind M und N Mengen, so können wir die Menge $M \times N$ aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in M$ und $y \in N$ bilden:

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \text{ und } y \in N\}$$

Die Menge $M \times N$ bezeichnen wir als **kartesisches Produkt** oder **Kreuzprodukt** der Mengen M und N.
Man kann nicht nur zwei Objekte x und y zu einem geordneten Paar (x, y) zusammenfügen, sondern n Objekte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zum **geordneten n-Tupel** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Relationen und Funktionen

M und N seien Mengen. Eine Menge R heißt **Relation zwischen M und N** genau dann, wenn $R \subset M \times N$ gilt. Für $x \in M$ und $y \in N$ sagt man auch x und y erfüllen R (oder x und y stehen in der Relation R), wenn $(x, y) \in R$ gilt.
R sei eine Relation. Dann heißt

$$\mathcal{D}(R) := \{x \mid \text{ es gibt ein } y \text{ mit } (x, y) \in R\}$$

Definitionsbereich von R und

$$\mathcal{W}(R) := \{y \mid \text{ es gibt ein } x \text{ mit } (x, y) \in R\}$$

Wertebereich von R.

Funktionen

F heißt **Funktion** oder **eindeutige Relation** genau dann, wenn gilt:

- F ist eine Relation
- Für alle x, y und z gilt:
  $(x, y) \in F$ und $(x, z) \in F$ folgt $y = z$.

Eine Funktion F wird meist durch eine **Signatur** eindeutig beschrieben. Zu der Signatur gehören:

- Ein Bezeichner der Funktion.
- Angabe des Werte- und Definitionsbereichs.
- Eine Abbildungsvorschrift.

Das Tupel (x, y) einer Funktion f kann auch als $y = f(x)$ bezeichnet werden.

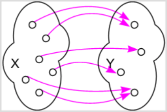
Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Sei f eine Funktion und Teilmenge von $N \times M$, so sagt man auch f bildet Objekte aus N auf M ab (f ist Abbildung von $N \to M$). Wir sagen diese Abbildung ist

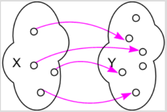
surjektiv genau dann, wenn gilt:
Zu jedem $y \in N$ gibt es (mindestens) ein $x \in M$ mit $f(x) = y$

injektiv genau dann, wenn gilt:
Für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$

bijektiv genau dann, wenn gilt:
f ist surjektiv und injektiv.



surjektiv



injektiv

Mächtigkeit von Mengen

Sind M und N Mengen, so definiert man:
M und N sind **gleichmächtig** genau dann, wenn es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt.

Äquivalenzrelationen

R sei eine Relation auf einer Menge M. Wir definieren nun

- R ist **reflexiv auf** M genau dann, wenn für alle $x \in M$ gilt $(x, x) \in R$.
- R ist **symmetrisch auf** M genau dann, wenn für alle $x, y \in M$ gilt:
  Wenn $(x, y) \in R$ ist, so ist auch $(y, x) \in R$.
- R ist **transitiv auf** M genau dann, wenn für alle $x, y, z \in M$ gilt:
  Wenn $(x, y) \in R$ und $(y, z) \in R$ dann ist auch $(x, z) \in R$

Prädikate

P sei eine Relation auf einer Menge M. Statt $x \in P$ schreiben wir kurz Px, statt $x \notin P$ schreiben wir kurz $\neg Px$. Für jedes Objekt x kann eindeutig festgestellt werden, ob dieses Objekt in der Relation enthalten ist. Zu jeder Relation R existiert eine **charakteristische Funktion** χ_R.

$$\chi_R x = \begin{cases} 1 & \text{falls } Px \\ 0 & \text{falls } \neg Px \end{cases}$$

Der Wertebereich der charakteristische Funktion kann zu den Wahrheitswerten $\{$ wahr, falsch $\}$ interpretiert (ausgewertet) werden. Mathematisch sind **Prädikate** ein Synonym für Relationen. Umgangssprachlich wird eher die charakteristische Funktion einer Relation mit dem Begriff Prädikat identifiziert.

n-stellige Operationen

Jedes $f : M^n \to M$ heißt eine **n-stellige Operation** auf M. Für $f(a_1, \ldots, a_n)$ führen wir die abkürzende Schreibweise $f\vec{a}$ ein. Eine 0-stellige Operation hat mengenthorethisch die Gestalt $\{(\emptyset, c)\}$ mit $c \in M$ und wird auch als **Konstante** mit dem Wert c bezeichnet. Am häufigsten werden 2-stellige Operationen angetroffen. Bei diesen wird das entsprechende Operationssymbol in der Regel zwischen die Argumente gesetzt. Eine mit $\circ$ bezeichnete Operation $\circ : M^2 \to M$ heißt

kommutativ , wenn $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in M$

assoziativ , wenn $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ für alle $a, b, c \in M$

idempotent , wenn $a \circ a = a$ für alle $a \in M$

invertierbar , wenn zu allen $a, b \in M$ Elemente $x, y \in M$ existieren mit $x \circ a = b$ und $a \circ y = b$

2-wertige Logik

In der 2-wertigen Logik existieren nur zwei verschiedene Wahrheitswerte, nämlich **wahr** und **falsch**. Wir verwenden für diese Wahrheitswerte folgende Repräsentation $\{1, 0\}$. 1 wird dabei als wahr interpretiert, 0 als falsch. Operationen auf Wahrheitswerte können mit Hilfe einer Wertetabelle beschrieben werden. Sei $M = \{0, 1\}$ und $\circ$ eine 2-stellige Operation auf M.

a	b	$a \circ b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Nun können anstelle von $\circ$ konkrete Operationen eingeführt werden.

Konjunktion

Semantik: A und B; Sowohl A als auch B
Symbol: $\wedge$

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Umgangssprachlich: „Und“-Verknüpfung. (Das Ergebnis ist NUR DANN wahr, wenn alle Operanden wahr sind).

Disjunktion

Semantik: A oder B
Symbol: $\vee$

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Umgangssprachlich: „Oder“-Verknüpfung. (Das Ergebnis ist IMMER DANN wahr, wenn MINDESTENS einer der Operanden wahr ist.)

Implikation

Semantik: Wenn A so B; Aus A folgt B
Symbol: $\rightarrow$

a	b	$a \rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Äquivalenz

Semantik: A genau dann wenn B; A dann und nur dann wenn B
Symbol: $\equiv$

a	b	$a \equiv b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Antivalenz

Semantik: Entweder nur A, oder nur B

Symbol: $+$

a	b	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Nihilition

Semantik: Weder A noch B
Symbol: $\downarrow$

a	b	$a \downarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Unverträglichkeit

Semantik: Nicht zugleich A und B
Symbol: $\uparrow$

a	b	$a \uparrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Negation

1-stellige Operation
Semantik: Wenn wahr, dann falsch. Wenn falsch, dann wahr.
Symbol: $\neg$

a	$\neg a$
0	1
1	0

Aussagenlogische Formeln

Wir wollen einen Formalismus schaffen, um logische Äquivalenzen zu erkennen und zu beschreiben. n-stellige Operationen sollen durch Formeln beschrieben werden. Dazu werden **Variablen** eingeführt. Variablen sind Platzhalter für die Werte wahr oder falsch und werden traditionell mit Hilfe der Symbole $p_0, p_1, \ldots$ dargestellt.

Induktive Formelbestimmung

F1 Die Variablen $p_0, p_1, \ldots$ sind Formeln, auch **Primformeln** genannt.

F2 Sind α, β Formeln, so sind auch die Zeichenfolgen $(\alpha \vee \beta), (\alpha \wedge \beta)$ und $\neg a$ Formeln.

Semantische Äquivalenz

Wann sind zwei Formeln α, β semantisch äquivalent? Zwei Formeln α, β sind dann semantisch äquivalent, wenn sie den gleichen Wertverlauf besitzen, wenn bei gleichen Eingaben, der gleiche Ausgabewert besitzen. Dies kann mit Hilfe von Wertetabellen überprüft werden.

Beispiel: Ist $\alpha \wedge \alpha$ semantisch äquivalent mit α?

a	a	$\alpha \wedge \alpha$
0	0	0
1	1	1

Semantische Äquivalenz

Beispiel: verifiziere die Äquivalenz von $(p \rightarrow q_1) \wedge (\neg p \rightarrow q_2)$ und $p \wedge q_1 \vee \neg p \wedge q_2$.

p	q_1	q_2	$p \rightarrow q_1$	$\neg p$	$\neg p \rightarrow q_2$	$(p \rightarrow q_1) \wedge (\neg p \rightarrow q_2)$
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1
...						